中国光学（中英文） Chinese Optics 核心期刊

非标准相移轮廓术的最优条纹频率分配

季怡心 张龙祥 仵苇 王建华

Optimal fringe frequency allocation for non-standard phase-shifting profilometry

JI Yi-xin, ZHANG Long-xiang, WU Wei, WANG Jian-hua

引用本文:
季怡心, 张龙祥, 仵苇, 王建华. 非标准相移轮廓术的最优条纹频率分配[J]. 中国光学, 2025, 18(2): 245-255. doi: 10.37188/CO.2024-0163
JI Yi-xin, ZHANG Long-xiang, WU Wei, WANG Jian-hua. Optimal fringe frequency allocation for non-standard phase-shifting profilometry[J]. *Chinese Optics*, 2025, 18(2): 245-255. doi: 10.37188/CO.2024-0163

在线阅读 View online: https://doi.org/10.37188/CO.2024-0163

文章编号 2097-1842(2025)02-0245-11

非标准相移轮廓术的最优条纹频率分配

季怡心，张龙祥，仵 苇，王建华*
（青岛理工大学 信息与控制工程学院，山东 青岛 266520）

摘要：在相移轮廓术中，非标准相移轮廓术结合时域相位展开算法仅需较少的条纹图案就可进行测量，因而具备较高的测量效率。鉴于条纹频率对测量精度有显著影响，本文分析了非标准相移轮廓术的时域相位展开中的相位误差，并进一步评估其可靠性。研究发现，相位展开的可靠性与条纹频率分配密切相关。据此，本文引入了一种最优条纹频率分配策略。基于该策略，本文对非标准相移轮廓术的不同频率组合进行了对比实验。实验结果显示，相比于 $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ 外差法的非最优频率组合，本文提出的频率组合的平均错误率降低了 62.96%；相比于 $2f_h+2f_m+3f_l$ 分层法的非最优频率组合，本文提出的频率组合的平均错误率降低了 49.23%。

关 键 词：非标准相移轮廓术；时域相位展开；相位展开可靠性；最优条纹频率分配
中图分类号：TP394.1;TH691.9 **文献标志码：**A **doi:** 10.37188/CO.2024-0163 **CSTR:** 32171.14.CO.2024-0163

Optimal fringe frequency allocation for non-standard phase-shifting profilometry

JI Yi-xin, ZHANG Long-xiang, WU Wei, WANG Jian-hua*
（*School of Information and Control Engineering*, *Qingdao University of Technology*, *Qingdao* 266520, *China*）
* *Corresponding author*, *E-mail*: *wangjianhua@qut.edu.cn*

Abstract: In phase-shifting profilometry, the non-standard phase-shifting profilometry combined with the temporal phase unwrapping algorithm requires fewer fringe patterns, thereby achieving higher measurement efficiency. Since fringe frequency significantly affects measurement accuracy, we analyze phase errors in the temporal phase unwrapping of the non-standard phase-shifting profilometry and further evaluates its reliability. It was found that the reliability of phase unwrapping is closely related to the allocation of fringe frequencies. Consequently, we propose an optimal fringe frequency allocation strategy. Based on this strategy, we conduct comparative experiments on different frequency combinations of non-standard phase-shifting profilometry. Then the experimental results show that compared with the non-optimal frequency combinations of the $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ heterodyne algorithm, the average error rate of the frequency combination proposed in this paper is reduced by 62.96%; compared with the non-optimal frequency combinations of the $2f_h+2f_m+3f_l$ hierarchical algorithm, the average error rate of the frequency combination proposed in this paper is reduced by 49.23%.

收稿日期：2024-09-19；**修订日期：**2024-10-12
基金项目：山东省自然科学基金项目（No. ZR2021MF024）
Supported by Natural Science Foundation of Shandong Province (No. ZR2021MF024)

Key words: non-standard phase-shifting profilometry; temporal phase unwrapping; phase unwrapping reliability; optimal fringe frequency allocation

1 引 言

条纹投影轮廓术因具有高精度、快速、非接触等优点而广泛用于工程制造和生物医疗中的形貌测量及表面质量控制[1-6]。相移轮廓术（也称相移法）[7-9]是一种基于相位测量原理的光学三维形貌测量技术。其通过相位分析提取物体表面的相位信息。在相位信息提取过程中，获取包裹相位和相位解包裹（也称相位展开）[10-14]是两个关键步骤，常见的相位展开方法包括空域相位展开(SPU)[12]和时域相位展开 (TPU)[13]。标准相移法的特点是各频率的相移步数相同，故其根据相移步数可分为三步和四步相移法等，根据相位展开的频率数分为双频和三频，如 $4f_h$+$4f_l$ 算法为双频四步相移法，$3f_h$+$3f_m$+$3f_l$ 算法为三频三步相移法（f_h、f_m 和 f_l 分别代表高、中和低频的条纹频率）。然而，标准相移法通常要采集大量的条纹图案，导致测量效率较低，不适用于实时或快速测量的场景。为了解决这一问题，非标准相移轮廓术（本文也称非标准算法）应运而生，并被广泛采用[15-17]。非标准算法在标准相移法的基础上合理减少条纹图案数量，在保证测量精度的同时显著提高了测量效率。由于条纹图案减少，导致各频率的步数有所不同，因此与标准相移法有所区别。

在相位信息提取过程中，不可避免地受到多种噪声源[18]的影响，如器件特性的局限性[19]、热噪声、环境干扰和量化误差等。这些噪声源可能同时存在并相互叠加，影响最终的相位提取结果。针对这一问题，研究者们提出了多种解决方案。Li J L 等人[20]将条纹噪声视为均值为 0、方差为 σ^2的加性高斯噪声，建立了标准相移法的包裹相位误差模型。该模型表明包裹相位误差主要与相移步数和调制强度有关，并转换为方差形式以量化误差。刘路等人[21]提出了一种基于附加二值条纹的相位展开误差校正方法，通过计算两组条纹阶次值的互补性来消除误差。侯艳丽等人[22]结合 TPU 与 SPU，对灵敏度大于 1 的条纹进行相位展开，该方法通过缩小条纹频率比来减少噪声的影响。然而，目前尚未有学者对非标准算法的频率分配及相位展开可靠性进行研究。

本文首先分析了两种非标准算法中噪声引起的包裹相位误差，并探讨了相位展开的可靠性，进一步通过条纹频率分配来抑制误差影响。本文研究的非标准算法基于标准三频三步相移法，通过减少条纹图案数量，结合 TPU 来提取展开相位信息。具体研究对象为：$3f_h$+$2f_m$+$2f_l$ 和 $2f_h$+$2f_m$+$3f_l$ 算法。针对这两种算法，本文构建了包裹相位误差模型，分析了相位展开的可靠性，并在此基础上，提出了最优条纹频率分配策略，旨在平衡低频至中频、中频至高频阶段的相位展开可靠性，以提升整体相位展开效果。最终，通过实验验证了该策略的有效性。

2 噪声引起的相位误差基础原理

2.1 标准相移法中噪声引起的包裹相位误差

对于相移法，相机采集的理想条纹图案可以表示为

$$I_n(u,v)=A(u,v)+B(u,v)\cos[\varphi(u,v)+(n-1)\delta], \tag{1}$$

式中，$I_n(u, v)$ 为采集的第 n 幅相移条纹图案，$A(u, v)$ 和 $B(u, v)$ 分别为采集条纹图案的背景强度和调制强度，(u, v) 为摄像机的像素坐标，δ 为相移步长，δ=2π/N，N 为相移总步数，$n\in[1, N]$，$\varphi(u, v)$ 为所求相位，即包裹相位，可表示为

$$\varphi(u,v)=-\arctan\frac{\sum_{n=1}^{N}I_n(u,v)\sin[(n-1)\delta]}{\sum_{n=1}^{N}I_n(u,v)\cos[(n-1)\delta]}. \tag{2}$$

相机采集条纹图案的过程中会受到多种误差的干扰，主要包括两种误差源：噪声误差和系统的非线性效应[23]，对于非线性效应，已有成熟的补偿策略[24-27]。因此，本文将重点关注噪声引起的相位误差。条纹图案中的噪声通常被视为均值为 0、方差为 σ^2的加性高斯噪声[20]。采集的含噪条纹图案可表示为[28]

$$I_n^z(u,v) = I_n(u,v) + Z_n(u,v) \quad , \qquad (3)$$

式中, $I_n^z(u,v)$表示第 n 幅含噪的条纹图案, $Z_n(u,v)$表示第 n 幅条纹图案的噪声强度, $Z_n(u,v) \sim (0, \sigma^2)$。由式 (2) 可进一步计算得到含噪的包裹相位 $\varphi^z(u,v)$。为简化公式, 下文将省略 (u,v)。对于标准三步相移法, 可以根据式 (1)~式 (3) 得到 φ 和 φ^z, 并推导出其包裹相位误差及方差, 方差的简化结果如下[28]:

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 \approx \frac{2\sigma^2}{3B^2} \quad , \qquad (4)$$

式中, $\sigma_{\Delta\varphi}^2$为标准三步相移法的包裹相位误差方差, 其下标 $\Delta\varphi$ 为对应的包裹相位误差。

标准相移法常用于计算展开相位, 如 $3f_h$+$3f_m$+$3f_l$ 算法。非标准算法在标准相移算法的基础上减少了条纹图案数量, 如 $3f_h$+$2f_m$+$2f_l$ 算法, 因此包裹相位误差的推导过程也发生了变化, 参考本节内容, 可进一步推导下文的非标准算法中噪声引起的包裹相位误差。

2.2　非标准算法中噪声引起的包裹相位误差

非标准算法在减少图像采集数量和降低数据处理复杂度方面具有优势, 更适用于快速成像的应用场景。在抗噪性能方面, 双频 TPU 存在更多噪声, 导致更多的不确定性, 而三频 TPU 通过增加频率信息提供了更多的约束条件, 从而提高了抗噪能力。为对比双频与三频算法的抗噪性能, 本文以飞船积木作为被测物体, 分别采用两种分层算法进行实验。实验结果如图 1(彩图见期刊电子版)所示, 图 1(a) 和图 1(b) 为标准三步相移算法 (3-step) 的重建结果, 图 1(c) 和图 1(d) 为非标准算法的重建结果。其中, 图 1(a) 和图 1(c) 使用三频 TPU 算法, 其频率组合为 $\{f_h$=64, f_m=8, f_l=1$\}$, 图 1(b) 和图 1(d) 则使用双频 TPU 算法, 其频率组合为 $\{f_h$=64, f_l=1$\}$。由图 1 可见, 三频算法的重建精度优于双频算法, 由此证明三频算法通过增加频率信息, 具有更高的抗噪能力。

本文将非标准算法与三频 TPU 相结合, 考虑到频率分配对相位展开精度的影响[29-31], 本文进一步进行了相关研究。对于 $3f_h$+$2f_m$+$2f_l$ 和 $2f_h$+$2f_m$+$3f_l$ 算法, 其中的 3 幅条纹图案 ($3f_h$ 和 $3f_l$), 其包裹相位误差方差已在 2.1 节提及。而剩余的条纹图案不同于标准三步相移法, 噪声引起的包裹相位误差方差不遵循标准 N 步相移法的一般形式。因此, 本节分析并推导了上述非标准算法的包裹相位误差方差。对于剩余的条纹图案, 其投影、采集和计算包裹相位的过程类似, 本节以 $3f_h$+$2f_m$+$2f_l$ 算法中 $2f_m$ 为例, 推导噪声引起的包裹相位误差及方差。

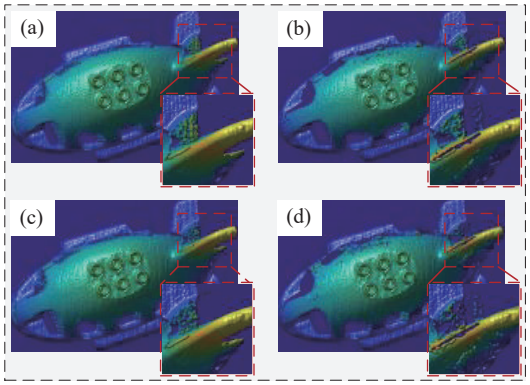


图 1　双频与三频 TPU 算法的重建结果对比。 (a) 3-step 和 $\{f_h$=64, f_m=8, f_l=1$\}$; (b) 3-step 和 $\{f_h$=64, f_l=1$\}$; (c) $3f_h$+$2f_m$+$2f_l$ 和 $\{f_h$=64, f_m=8, f_l=1$\}$; (d) $3f_h$+$2f_l$ 和 $\{f_h$=64, f_l=1$\}$

Fig. 1　Comparison of reconstruction results of dual-frequency and triple-frequency TPU algorithms. (a) 3-step and $\{f_h$=64, f_m=8, f_l=1$\}$; (b) 3-step and $\{f_h$=64, f_l=1$\}$; (c) $3f_h$+$2f_m$+$2f_l$ and $\{f_h$=64, f_m=8, f_l=1$\}$; (d) $3f_h$+$2f_l$ and $\{f_h$=64, f_l=1$\}$

采集的理想条纹图案和含噪条纹图案为

$$\begin{cases} I_4 = A + B\cos\varphi_{m(322)} \\ I_5 = A + B\sin\varphi_{m(322)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_4^z = I_4 + Z_4 \\ I_5^z = I_5 + Z_5 \end{cases} \quad , \qquad (5)$$

式中, I_4 和 I_5 分别为采集的两幅理想条纹图案, $\varphi_{m(322)}$ 为中频条纹 f_m 的包裹相位, 采集条纹图案从第 4 幅开始编号的原因是, 对于 $3f_h$+$2f_m$+$2f_l$ 算法, $3f_h$ 的条纹图案编号为 1~3, 含噪条纹编号与之类似。I_4^z和I_5^z分别为两幅含噪条纹图案, Z_4 和 Z_5 分别为第 4 幅和第 5 幅条纹图案的噪声强度。随后, 对理想条纹图案和含噪条纹图案进行包裹相位求解。

$$\begin{cases} \varphi_{m(322)} = \arctan\dfrac{3I_5 - I_1 - I_2 - I_3}{3I_4 - I_1 - I_2 - I_3} \\ \varphi_{m(322)}^z = \arctan\dfrac{3I_5^z - I_1^z - I_2^z - I_3^z}{3I_4^z - I_1^z - I_2^z - I_3^z} \end{cases} \quad , \qquad (6)$$

式中, $\varphi_{m(322)}^z$为中频条纹 f_m 的含噪包裹相位, I_1、I_2 和 I_3 分别为频率 f_h 的理想条纹图案, I_1^z、I_2^z和I_3^z分别为对应的含噪条纹图案。根据公式 (1) 和公式 (3), 可推导出具体公式。对公式 (6) 中的两

个包裹相位进行求差处理，可以得到中频条纹的包裹相位误差，进一步化简为

$$\Delta\varphi_{m(322)}=\varphi^{z}_{m(322)}-\varphi_{m(322)}\approx \frac{\Delta Z_3\cos\varphi_{m(322)}-\Delta Z_4\sin\varphi_{m(322)}}{3B}, \quad (7)$$

$$\begin{cases}\Delta Z_3=3Z_5-Z_1-Z_2-Z_3\\ \Delta Z_4=3Z_4-Z_1-Z_2-Z_3\end{cases}, \quad (8)$$

式中，$\Delta\varphi_{m(322)}$ 为中频条纹的包裹相位误差，分别对 ΔZ_3 和 ΔZ_4 求方差，化简结果为

$$\begin{cases}\sigma^2_{\Delta Z_3}=12\sigma^2\\ \sigma^2_{\Delta Z_4}=12\sigma^2\end{cases}. \quad (9)$$

最终，$3f_h+2f_m+2f_l$ 算法的中频条纹包裹相位误差方差的化简结果为

$$\sigma^2_{\Delta\varphi_{m(322)}}\approx\frac{4\sigma^2}{3B^2}. \quad (10)$$

对于 $3f_h+2f_m+2f_l$ 算法和 $2f_h+2f_m+3f_l$ 算法中的剩余条纹图案，其包裹相位误差方差的推导过程与上述中频条纹相似。最终，包裹相位误差方差化简结果为

$$\sigma^2_{\Delta\varphi_{l(322)}}\approx\frac{4\sigma^2}{3B^2},\sigma^2_{\Delta\varphi_{h(223)}}\approx\frac{4\sigma^2}{3B^2},\sigma^2_{\Delta\varphi_{m(223)}}\approx\frac{4\sigma^2}{3B^2}, \quad (11)$$

式中，$\sigma^2_{\Delta\varphi_{l(322)}}$ 为 $3f_h+2f_m+2f_l$ 算法的低频条纹的包裹相位误差方差，$\sigma^2_{\Delta\varphi_{h(223)}}$ 和 $\sigma^2_{\Delta\varphi_{m(223)}}$ 分别为 $2f_h+2f_m+3f_l$ 算法的高频和中频条纹的包裹相位误差方差。

2.3 非标准算法的最优频率分配

在公式 (2) 中，包裹相位通过反正切函数计算得到，导致相位值被折叠在 $(-\pi,\pi]$ 内，也称为折叠相位。为了得到连续相位，需要对包裹相位进行展开处理。

外差 TPU 通过叠加各频率的包裹相位来计算展开相位，针对频率为 f_{h1}、f_{h2} 和 f_{h3} 的条纹图案（f_{h1}、f_{h2} 和 f_{h3} 分别为外差法的 3 种频率，$f_{h1}>f_{h2}>f_{h3}\gg1$），使用公式 (2) 和公式 (6) 得到对应的包裹相位 φ_{h1}、φ_{h2} 和 φ_{h3}。随后将 φ_{h1} 和 φ_{h2} 进行叠加得到 φ_{h1-h2}，将 φ_{h2} 和 φ_{h3} 叠加得到 φ_{h2-h3}，最后将 φ_{h1-h2} 和 φ_{h2-h3} 叠加得到 $\varphi_{h1-h2-h3}$。确保 $\varphi_{h1-h2-h3}$ 的频率 $f_{h1-h2-h3}$ 为 1，从而使 $\varphi_{h1-h2-h3}=\Phi_{h1-h2-h3}$。随后利用展开相位 $\Phi_{h1-h2-h3}$ 反推得到上一级条纹图案的展开相位 Φ_{h1-h2}，进一步反推得到展开相位 Φ_{h1}，两次反推过程如式 (12) 和式 (13) 所示。

$$\Phi_{h1-h2}=\varphi_{h1-h2}+2\pi k_1, k_1=round\left[\frac{(f_{h1-h2}/f_{h1-h2-h3})\Phi_{h1-h2-h3}-\varphi_{h1-h2}}{2\pi}\right], \quad (12)$$

$$\Phi_{h1}=\varphi_{h1}+2\pi k_2, k_2=round\left[\frac{(f_{h1}/f_{h1-h2})\Phi_{h1-h2}-\varphi_{h1}}{2\pi}\right], \quad (13)$$

式中，k_1 和 k_2 分别为各个展开阶段的条纹级数，$f_{h1-h2}=f_{h1}-f_{h2}$。通过分析公式 (12) 和公式 (13)，可以发现两个阶段的展开相位主要由其对应的条纹级数决定，而条纹级数则主要由对应式中的分子项决定。据此可推断展开相位的误差主要取决于公式 (12) 和公式 (13) 的分子项，基于这一推断，本文将公式 (12) 和公式 (13) 中分子项的误差分别定义为各阶段的相位展开误差 $\Delta\Phi_{h23}$ 和 $\Delta\Phi_{h12}$。

$$\Delta\Phi_{h23}=(f_{h1-h2}/f_{h1-h2-h3})\Delta\Phi_{h1-h2-h3}-\Delta\varphi_{h1-h2}, \quad (14)$$

$$\Delta\Phi_{h12}=(f_{h1}/f_{h1-h2})\Delta\Phi_{h1-h2}-\Delta\varphi_{h1}, \quad (15)$$

式中，$\Delta\Phi_{h1-h2-h3}$ 和 $\Delta\Phi_{h1-h2}$ 分别为展开相位 $\Phi_{h1-h2-h3}$ 和 Φ_{h1-h2} 中的误差，$\Delta\varphi_{h1-h2}$ 和 $\Delta\varphi_{h1}$ 分别为包裹相位 φ_{h1-h2} 和 φ_{h1} 中的误差，为避免公式 (12) 和公式 (13) 中出现条纹级数误差，必须确保 $\Delta\Phi_{h23}$ 和 $\Delta\Phi_{h12}$ 的绝对值不超过 π。通常情况下，包裹相位 φ_{h1-h2} 和 φ_{h1} 的取值范围限定在 $(-\pi,\pi]$ 区间内，$\Delta\varphi_{h1-h2}$ 和 $\Delta\varphi_{h1}$ 则相对更小，因此在后续分析中可忽略。相比之下，展开相位远大于包裹相位，其误差也相对更为显著。此外，$\Delta\Phi_{h1-h2-h3}$ 和 $\Delta\Phi_{h1-h2}$ 分别与频率比 $(f_{h1-h2}/f_{h1-h2-h3})$ 和 (f_{h1}/f_{h1-h2}) 相乘，使误差值进一步呈倍数增加，并占据主导成分。因此，$\Delta\Phi_{h23}$ 和 $\Delta\Phi_{h12}$ 主要取决于与之相乘的频率比。换言之，相位展开误差主要与对应式中的频率比有关。如果 k_1 和 k_2 对应的频率比 $(f_{h1-h2}/f_{h1-h2-h3})$ 和 (f_{h1}/f_{h1-h2}) 均较小，即两个相位展开阶段的相位误差均较小，则称两个阶段均具有较高的可靠性，因此整体相位展开的可靠性较高。

确保整体相位展开的可靠性，关键在于保证两个阶段的可靠性均相对较高，即频率比 $(f_{h1-h2}/f_{h1-h2-h3})$ 和 (f_{h1}/f_{h1-h2}) 的值均相对较小。然而，满足上述条件会导致最大频率 f_{h1} 降低，从而引起相位精度降低和分辨率下降等问题。因此，在最大

频率 f_{h1} 合适的情况下, 如何得到最优的条纹频率组合成为一个关键问题。基于各阶段的相位展开误差主要取决于该阶段频率比的认知, 考虑到两个阶段的先后顺序和误差传递特性, 以及在最大频率一定的条件下, 两个阶段频率比呈反比例关系, 本文分为两种情况进行分析, 第一种情况: 在最大频率一定的情况下, 若 $(f_{h1-h2}/f_{h1-h2-h3})$ 较小, 即第一阶段的相位展开可靠性高, 则该阶段的主要误差来源为 $\Delta\Phi_{h1-h2-h3}$, 由于频率比较小, 故 $\Delta\Phi_{h1-h2-h3}$ 引起的大幅值误差数量较少, 甚至不存在, 而 $\Delta\varphi_{h1-h2}$ 自身引起的大幅值误差数量较少, 且不受频率比的影响, 因此, 第一相位展开阶段引起的大幅值误差较少。然而, (f_{h1}/f_{h1-h2}) 相对较大, 导致第二阶段的相位展开可靠性降低。该阶段会进一步放大 $\Delta\Phi_{h1-h2}$ 中的大幅值误差, 但数量基本不变, 其数量近似等于第一阶段产生的大幅值误差数量, 同时 $\Delta\Phi_{h1-h2}$ 中的小幅值误差将被进一步放大。最终, 展开相位中存在较多的小幅值误差, 而大幅值误差较少, 甚至没有。

第二种情况: 在最大频率一定的情况下, 若 $(f_{h1-h2}/f_{h1-h2-h3})$ 较大, 即第一阶段的相位展开可靠性低。较大的频率比导致 $\Delta\Phi_{h1-h2-h3}$ 引起较多的大幅值误差, 即该相位展开阶段引入了较多的大幅值误差; (f_{h1}/f_{h1-h2}) 相对较小, 即第二阶段的相位展开可靠性高, 尽管频率比相对较小, 但该阶段仍会放大 $\Delta\Phi_{h1-h2}$ 中的大幅值误差, 而 $\Delta\Phi_{h1-h2}$ 中的小幅值误差放大不明显, 最终, 展开相位中大幅值误差数量很多, 而小幅值误差较少。

以上两种不合理的频率组合均会引起较大的误差, 为避免上述情况, 条纹频率应该实现最优化分配。本文的策略是使低频至中频(第一个展开阶段)的相位误差 $\Delta\Phi_{h23}$ 与中频至高频(第二个展开阶段)的相位误差 $\Delta\Phi_{h12}$ 尽可能一致, 即保证两个阶段的相位展开可靠性尽可能一致, 从而避免某一阶段引入过多的相位误差。为便于量化计算, 本文对相位误差分别求方差, 并使之相等, 从而得到

$$\sigma^2_{\Delta\Phi_{h23}}=\sigma^2_{\Delta\Phi_{h12}}\quad , \tag{16}$$

式中, $\sigma^2_{\Delta\Phi_{h23}}$ 和 $\sigma^2_{\Delta\Phi_{h12}}$ 分别为 $\Delta\Phi_{h23}$ 和 $\Delta\Phi_{h12}$ 的方差, 具体计算过程为

$$\sigma^2_{\Delta\Phi_{h23}}=(f_{h1-h2}/f_{h1-h2-h3})^2\times\sigma^2_{\Delta\Phi_{h1-h2-h3}}+\sigma^2_{\Delta\varphi_{h1-h2}}\quad , \tag{17}$$

$$\sigma^2_{\Delta\Phi_{h12}}=(f_{h1}/f_{h1-h2})^2\times\sigma^2_{\Delta\Phi_{h1-h2}}+\sigma^2_{\Delta\varphi_{h1}}\quad . \tag{18}$$

式 (17) 和式 (18) 中, 展开相位和包裹相位的噪声误差被视为不相关, 对于 $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ 外差 TPU 算法, 需计算叠加包裹相位的误差方差, 相关公式如式 (19) 所示:

$$\begin{cases}\Delta\varphi_{h1-h2}=\Delta\varphi_{h1}-\Delta\varphi_{h2}\\ \Delta\varphi_{h2-h3}=\Delta\varphi_{h2}-\Delta\varphi_{h3}\\ \Delta\varphi_{h1-h2-h3}=\Delta\varphi_{h1-h2}-\Delta\varphi_{h2-h3}\end{cases}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}\sigma^2_{\Delta\varphi_{h1-h2}}=\dfrac{6\sigma^2}{3B^2}\\ \sigma^2_{\Delta\varphi_{h2-h3}}=\dfrac{8\sigma^2}{3B^2}\\ \sigma^2_{\Delta\varphi_{h1-h2-h3}}=\dfrac{14\sigma^2}{3B^2}\end{cases}\quad , \tag{19}$$

其包裹相位误差方差如图 2 所示。

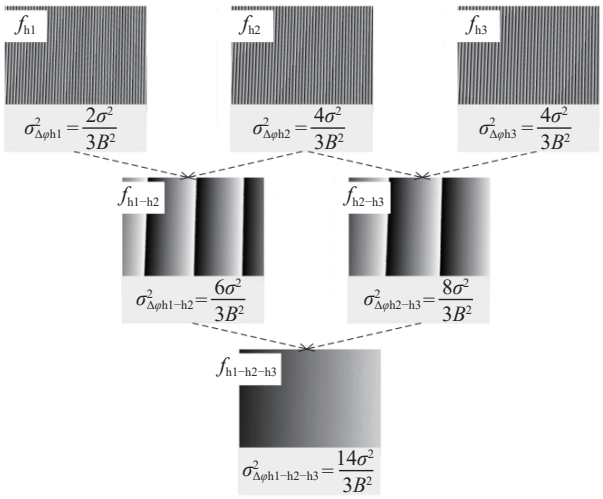


图 2　$3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ 算法的包裹相位误差方差

Fig. 2　Wrapped phase error variances for $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ algorithm

将式 (19) 代入式 (17) 和式 (18), 并需满足式 (16) 的条件, 推导后的关系式为

$$f_{h1-h2}=\sqrt{\frac{\sqrt{21f_{h1}^2+1}-1}{7}}\quad . \tag{20}$$

在测量系统中, 合理的频率应能保证每个条纹沿水平轴至少有 5 个像素[31], 对于水平分辨率为 912 的投影仪, 条纹频率可高达 182 个周期/帧, 因此本文中的条纹频率均低于 182。对于外差 TPU 算法, 初始 f_{h1}=150, 根据式 (20) 计算并进

行取整处理后得到 f_{h1-h2}=10。考虑到取整处理会引入偏差，为确保相位展开的可靠性最大程度上保持一致，需重新利用式 (20) 计算得到 f_{h1}=153，使频率组合更贴近理论模型。因此，$3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ 外差 TPU 算法的最优频率组合为 {f_{h1}=153，f_{h2}=143，f_{h3}=134}。随后，本文进一步推导了 $2f_{h1}+2f_{h2}+3f_{h3}$ 外差 TPU 的叠加包裹相位误差方差，推导结果为

$$\sigma^2_{\Delta\varphi_{h1-h2}}=\frac{8\sigma^2}{3B^2},\sigma^2_{\Delta\varphi_{h2-h3}}=\frac{6\sigma^2}{3B^2},\sigma^2_{\Delta\varphi_{h1-h2-h3}}=\frac{14\sigma^2}{3B^2}. \tag{21}$$

将式 (21) 代入式 (17) 和式 (18)，并需满足式 (16) 的条件，最终的关系式为

$$f_{h1-h2}=\sqrt{\frac{\sqrt{28f_{h1}^2+1}-1}{7}}\quad . \tag{22}$$

$2f_{h1}+2f_{h2}+3f_{h3}$ 外差 TPU 算法采用类似于 $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ 算法的频率分配方法，经计算，确定 f_{h1}=160 为最大频率，并得到 f_{h1-h2}=11。最终，最优频率组合为 {f_{h1}=160，f_{h2}=159，f_{h3}=139}，非标准三频外差 TPU 的最优频率组合如表 1 所示。

表 1 非标准三频外差 TPU 的最优频率组合

Tab. 1 Optimal frequency combinations for non-standard triple-frequency heterodyne TPU

	f_{h1}	f_{h2}	f_{h3}
$3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$	153	143	134
$2f_{h1}+2f_{h2}+3f_{h3}$	160	149	139

分层 TPU 算法需计算不同条纹频率的包裹相位，并以频率为 1 的展开相位为基础，推算其他频率的展开相位。对于 $3f_h+2f_m+2f_l$ 和 $2f_h+2f_m+3f_l$ 分层 TPU 算法 ($f_h>f_m>f_l$=1)，首先根据式 (2) 和式 (6) 计算得到频率分别为 f_h、f_m 和 f_l 的包裹相位 φ_h、φ_m 和 φ_l，由于 f_l=1，故 $\varphi_l=\Phi_l$。随后，利用低频展开相位 Φ_l 计算展开相位 Φ_h 和 Φ_m，相关公式可以表示为

$$\Phi_m=\varphi_m+2\pi k_1,k_1=round\left[\frac{(f_m/f_l)\Phi_l-\varphi_m}{2\pi}\right], \tag{23}$$

$$\Phi_h=\varphi_h+2\pi k_2,k_2=round\left[\frac{(f_h/f_m)\Phi_m-\varphi_h}{2\pi}\right]. \tag{24}$$

分层法相位展开的可靠性与外差法相似，主要取决于式中 k_1 和 k_2 的分子项，将分子项中的误差分别定义为 $\Delta\Phi_{ml}$ 和 $\Delta\Phi_{hm}$，它们代表各阶段相位展开的相位误差。

$$\Delta\Phi_{ml}=(f_m/f_l)\Delta\Phi_l-\Delta\varphi_m\quad , \tag{25}$$

$$\Delta\Phi_{hm}=(f_h/f_m)\Delta\Phi_m-\Delta\varphi_h\quad , \tag{26}$$

式中，$\Delta\Phi_l$ 和 $\Delta\Phi_m$ 分别为展开相位 Φ_l 和 Φ_m 的误差，$\Delta\varphi_m$ 和 $\Delta\varphi_h$ 分别为包裹相位 φ_m 和 φ_h 的误差。与外差 TPU 中最优频率组合的推导类似，要使得分层 TPU 的整体相位展开可靠性最佳，需满足 $\Delta\Phi_{ml}=\Delta\Phi_{hm}$，即 $\sigma^2_{\Delta\Phi ml}=\sigma^2_{\Delta\Phi hm}$。对于 $3f_h+2f_m+2f_l$ 算法，最终的关系式为

$$f_m=\frac{\sqrt{\sqrt{16f_h^2+1}-1}}{2}\quad . \tag{27}$$

分层 TPU 算法的初始 f_h=170，根据公式 (27) 计算并取整后得到 f_m=13。为最大化保持相位展开可靠性的一致性，再次采用式 (27) 计算得到最终 f_h=169，从而尽可能满足可靠性一致的条件。据此，该算法的最优频率组合为 {f_h=169，f_m=13，f_l=1}。对于 $2f_h+2f_m+3f_l$ 算法，最终的频率关系式如下，并计算得到 f_h=181 和 f_m=16。

$$f_m=\sqrt{\sqrt{2}\times f_h}\quad . \tag{28}$$

$3f_h+2f_m+2f_l$ 和 $2f_h+2f_m+3f_l$ 分层 TPU 算法的最优频率组合如表 2 所示。

表 2 非标准三频分层 TPU 的最优频率组合

Tab. 2 Optimal frequency combinations for non-standard triple-frequency hierarchical TPU

	f_h	f_m	f_l
$3f_h+2f_m+2f_l$	169	13	1
$2f_h+2f_m+3f_l$	181	16	1

3 实 验

3.1 $3f_h+2f_m+2f_l$ 分层算法的仿真对比

本文通过计算机仿真模拟了两种曲面：Peaks 曲面和凹曲面，曲面均为 256 pixel×256 pixel。采用 $3f_h+2f_m+2f_l$ 分层算法的最优频率组合和两种随机的非最优频率组合生成条纹图案，引入高斯噪

声模拟实际采集过程中的噪声干扰, 并进行相位展开获取三维 (3D) 重建结果。重建结果如图 3 (彩图见期刊电子版)所示, 图 3(a) 为仿真曲面及对应的放大视图, 放大视图主要沿 z 轴方向进行放大, 以便于获取真实曲面信息。图 3(b) 为最优频率组合{f_h=169, f_m=13, f_l=1}的重建结果, 图 3(c)和图 3(d) 分别为两种非最优频率组合的重建结果。实验结果表明, 图 3(b) 中的相位误差最不明显, 甚至没有, 图 3(c) 的相位误差幅值较小但分布广泛, 图 3(d) 中的误差幅值大, 但数量相对较少。该结果与上述理论分析相符, 证实了本文所提的最优频率组合的合理性与有效性。

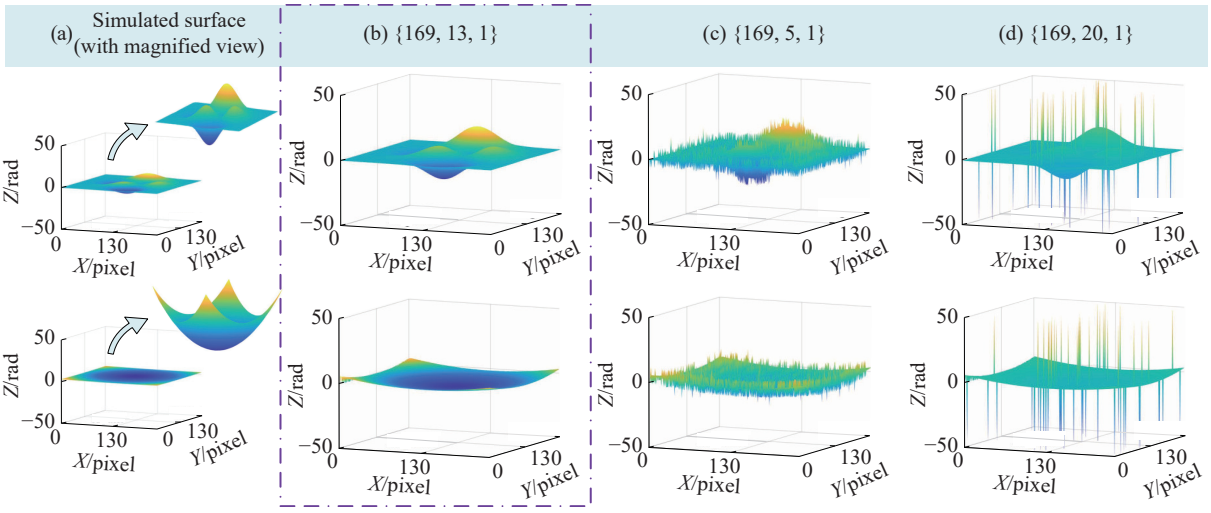


图 3　仿真曲面的三维重建结果。(a) 仿真曲面 (含放大图); 频率组合 (b) {f_h=169, f_m=13, f_l=1}; (c) {f_h=169, f_m=5, f_l=1}; (d) {f_h=169, f_m=20, f_l=1}

Fig. 3　3D reconstruction results of the simulated surface. (a) Simulated surface (with magnified view); frequency combination (b) {f_h=169, f_m=13, f_l=1}; (c) {f_h=169, f_m=5, f_l=1}; (d) {f_h=169, f_m=20, f_l=1}

3.2　非标准算法的实物对比

实验设备包括数字投影仪 (DLP LightCraft 4500, 分辨率为 1 140 pixel×912 pixel)、摄像机 (MER-131-210U3M, 分辨率为 1 024 pixel×768 pixel) 和计算机。实物实验旨在验证所提方法的实物测量效果。为了增强实验结果的说服力, 本文将不同频率组合下的 12 步相移法 (12-step) 与非标准算法的重建结果进行对比, 并对不同频率组合的结果进行定量分析。

本文采用 $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ 算法进行外差 TPU 的对比实验, 以狐狸面具作为被测物体。实验结果如图 4(彩图见期刊电子版)所示, 图 4(a)~图 4(c) 分别展示了不同频率组合下 $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ 外差 TPU 的重建结果, 图 4(d)~图 4(f) 分别展示了不同频率组合下 12-step 的重建结果, 并将其作为基准真值。图 4(g) 为横截面对比图 (第 600 行), 图 4(h) 为图 4(g) 的局部放大图。由图 4(a)~图 4(c) 可见, 频率组合{f_{h1}=153, f_{h2}=133, f_{h3}=114}的重建结果存在明显噪声和伪影, 与真值存在明显差异。频率组合{f_{h1}=153, f_{h2}=148, f_{h3}=144}的重建精度虽有所提升, 噪声和伪影有所减少, 但表面光滑度仍不佳, 上述两组非最优频率组合均表现出较弱的抗噪能力。相比之下, 最优频率组合{f_{h1}=153, f_{h2}=143, f_{h3}=134}的重建精度显著提高, 能够准确反映被测物体的形状和结构, 与真值最为接近, 验证了所提频率分配策略的有效性。此外, 通过对比 3 组 12-step 的重建结果可以发现, 不同频率组合的重建结果表面均较为光滑, 且最优频率组合在大部分区域均呈现出高精度的重建效果。相反, 非最优频率组合的结果在部分区域精度略低。因此, 本文将具有最高精度的 12-step 与最优频率组合结果作为横截面对比实验的真值。由图 4(g) 和图 4(h) 可见, 非最优条纹频率组合均导致了大量的相位误差。其中, 红色实线 ({f_{h1}=153, f_{h2}=133, f_{h3}=114}) 的相位值波动较大, 存在显著的大幅值误差, 黑色实线 ({f_{h1}=153, f_{h2}=148, f_{h3}=144}) 中存在大量的小幅值误差, 而黄色虚线 (最优频率{f_{h1}=153, f_{h2}=143, f_{h3}=134}) 中仅存在几处误差, 与真值(绿色实线)最为接近, 拟合度最高, 该结果证明了最优频率分配策略的有效性。

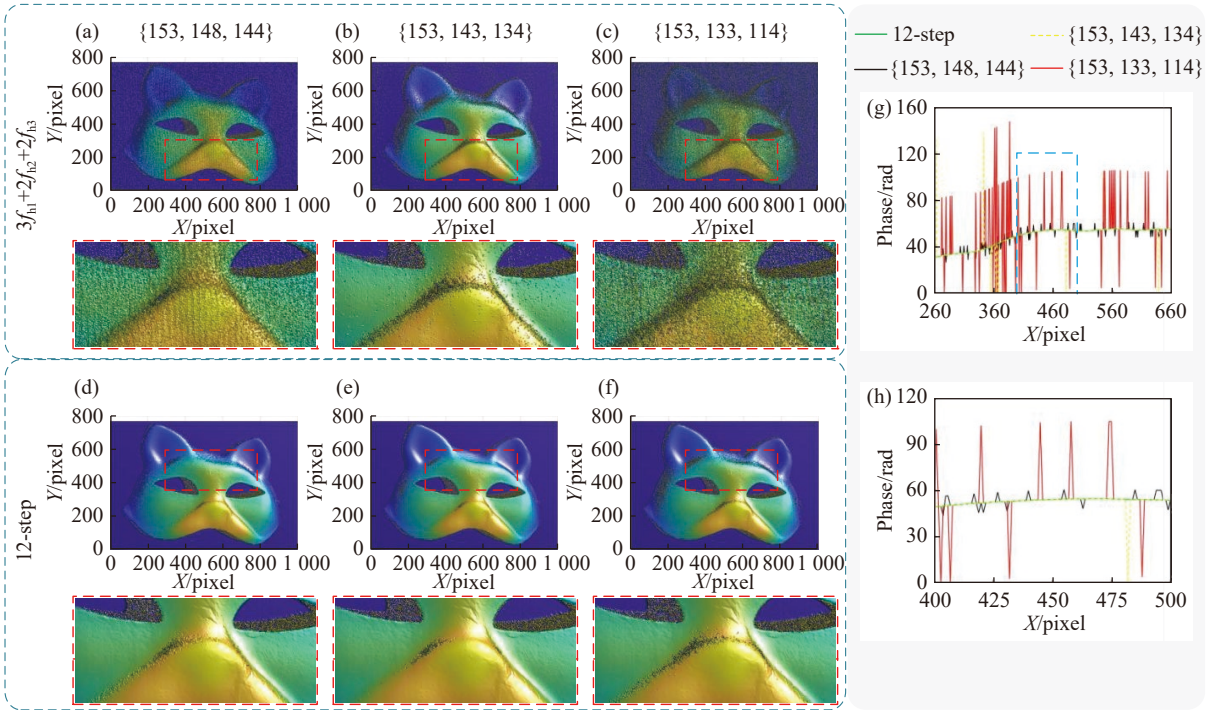


图 4 $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ 外差 TPU 算法的重建结果比较。(a) $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ 和{f_{h1}=153, f_{h2}=148, f_{h3}=144}; (b) $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ 和{f_{h1}=153, f_{h2}=143, f_{h3}=134}; (c) $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ 和{f_{h1}=153, f_{h2}=133, f_{h3}=114}; (d) 12-step 和{f_{h1}=153, f_{h2}=148, f_{h3}=144}; (e) 12-step 和{f_{h1}=153, f_{h2}=143, f_{h3}=134}; (f) 12-step 和{f_{h1}=153, f_{h2}=133, f_{h3}=114}; (g) 横截面对比 (第 600 行); (h) 为 (g) 的放大视图

Fig. 4 Comparison of reconstruction results based on $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ heterodyne TPU. (a) $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ and {f_{h1}=153, f_{h2}=148, f_{h3}=144}; (b) $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ and {f_{h1}=153, f_{h2}=143, f_{h3}=134}; (c) $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ and {f_{h1}=153, f_{h2}=133, f_{h3}=114}; (d) 12-step and {f_{h1}=153, f_{h2}=148, f_{h3}=144}; (e) 12-step and {f_{h1}=153, f_{h2}=143, f_{h3}=134}; (f) 12-step and {f_{h1}=153, f_{h2}=133, f_{h3}=114}; (g) cross-sectional comparison (line 600); (h) an enlarged view of (g)

为定量比较不同频率组合的错误率 (Error rate) 和均方根误差 (RMSE), 本文将更为准确的 12-step 和最优频率组合的结果作为真值, 量化结果如表 3 所示。数据表明, 最优频率组合的错误率和 RMSE 均最低, 与{f_{h1}=153, f_{h2}=148, f_{h3}=144}和{f_{h1}=153, f_{h2}=133, f_{h3}=114}相比, 错误率分别降低了 61.34% 和 64.58%, RMSE 分别降低了 7.30% 和 57.45%。

表 3 基于 $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ 外差 TPU 算法的定量比较

Tab. 3 Quantitative comparison based on $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ heterodyne TPU

{f_{h1}, f_{h2}, f_{h3}}	Error rate	RMSE/rad
{153, 143, 134}	11.76%	10.4789
{153, 148, 144}	30.41%	11.3039
{153, 133, 114}	33.18%	24.6249

随后, 本文采用 $2f_h+2f_m+3f_l$ 算法进行分层 TPU 对比实验, 以大象面具作为被测物体, 实验结果如图 5(彩图见期刊电子版)所示。实验将最优频率组合与两组非最优频率组合的重建结果进行对比, 并以 12-step 的重建结果作为基准真值。与外差法横截面对比实验一样, 本组实验将重建结果最佳的 12-step 和最优频率组合的结果作为真值, 并进一步比较错误率和 RMSE。

图 5(a)~图 5(c) 分别为不同频率组合下 $2f_h+2f_m+3f_l$ 分层 TPU 的重建结果。可见, 对于非最优频率组合{f_h=181, f_m=6, f_l=1}, 其重建结果在边缘处及眼部区域的精度较差, 非最优频率组合{f_h=181, f_m=30, f_l=1}的重建精度在眼部区域有所提升, 但边缘处仍存在较多误差。相比之下, 最优频率组合{f_h=181, f_m=16, f_l=1}的重建结果最佳, 整体误差显著减少, 精度最高。图 5(g)~图 5(h) 展示了第 170 行的横截面对比结果, 可见, 最优频率组合 (黄色虚线) 几乎没有明显的误差, 与绿色实线 (真值) 高度吻合, 而两组非最优频率组合中均存在几处相位偏差, 以上实验结果进一步证明了最优频率组合的有效性。

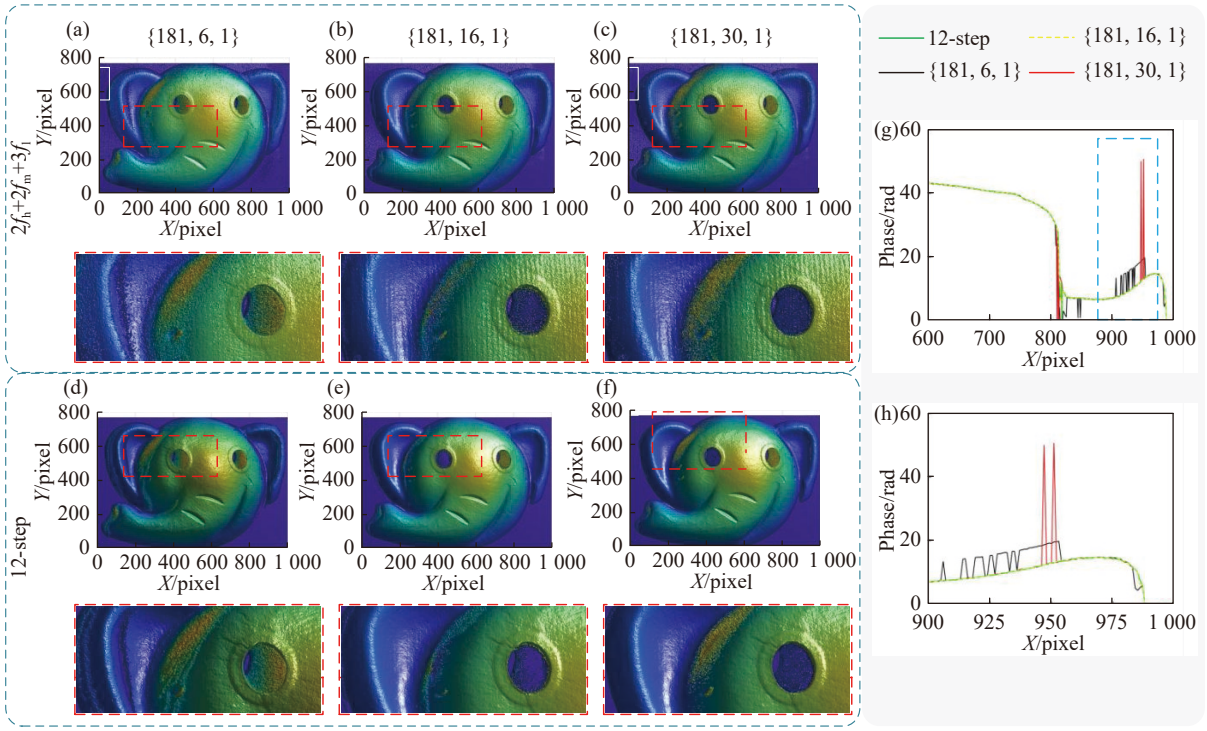


图 5　基于 $2f_h+2f_m+3f_l$ 分层 TPU 算法的重建结果比较。(a) $2f_h+2f_m+3f_l$ 和 $\{f_h=181, f_m=6, f_l=1\}$; (b) $2f_h+2f_m+3f_l$ 和 $\{f_h=181, f_m=16, f_l=1\}$; (c) $2f_h+2f_m+3f_l$ 和 $\{f_h=181, f_m=30, f_l=1\}$; (d) 12-step 和 $\{f_h=181, f_m=6, f_l=1\}$; (e) 12-step 和 $\{f_h=181, f_m=16, f_l=1\}$(f) 12-step 和 $\{f_h=181, f_m=30, f_l=1\}$; (g) 横截面对比 (第 170 行); (h) 为 (g) 的放大视图

Fig. 5　Comparison of reconstruction results based on $2f_h+2f_m+3f_l$ hierarchical TPU. (a) $2f_h+2f_m+3f_l$ and $\{f_h=181, f_m=6, f_l=1\}$; (b) $2f_h+2f_m+3f_l$ and $\{f_h=181, f_m=16, f_l=1\}$; (c) $2f_h+2f_m+3f_l$ and $\{f_h=181, f_m=30, f_l=1\}$; (d) 12-step and $\{f_h=181, f_m=6, f_l=1\}$; (e)12-step and $\{f_h=181, f_m=16, f_l=1\}$; (f) 12-step and $\{f_h=181, f_m=30, f_l=1\}$; (g) cross-sectional comparison (line 170); (h) an enlarged view of (g)

定量对比结果如表 4 所示, 表 4 数据表明, 最优频率组合的错误率和 RMSE 均最低, 与非最优频率组合$\{f_h=181, f_m=6, f_l=1\}$和$\{f_h=181, f_m=30, f_l=1\}$相比, 错误率分别降低了 70.42% 和 28.04%, RMSE 分别降低了 60.99% 和 65.82%, 上述数据更直观地证明了所提频率分配策略的有效性。

表 4　基于 $2f_h+2f_m+3f_l$ 分层 TPU 的定量比较

Tab. 4　Quantitative comparison based on $2f_h+2f_m+3f_l$ hierarchical TPU

$\{f_h, f_m, f_l\}$	Error rate	RMSE/rad
{181, 16, 1}	4.56%	1.5398
{181, 6, 1}	15.41%	3.9469
{181, 30, 1}	6.33%	4.5043

4　结　论

标准相移法结合时域相位展开提取展开相位, 是静态场景 3D 测量中广泛应用的高精度、高鲁棒性方案。非标准算法通过减少条纹图案的采集数量, 提高测量效率, 更适用于实时或动态测量场景。相比于双频, 三频 TPU 因其优越的抗噪能力被广泛应用。然而, 在非标准三频 TPU 算法中, 噪声引入的误差不可避免。为减小误差, 通常需优化实验设计或选择合适算法, 以提高相位展开的可靠性和准确性。为此, 本文提出了一种基于非标准三频 TPU 算法的最优条纹频率分配策略, 并展开相关实验进行验证。实验结果表明, 非标准三频算法的频率分配应确保两个阶段相位展开的可靠性尽可能一致, 否则会引发显著的相位误差。

与非最优条纹频率组合相比, 最优频率组合的展开相位错误率更低、准确性更高。具体而言, 与 $3f_{h1}+2f_{h2}+2f_{h3}$ 外差法和 $2f_h+2f_m+3f_l$ 分层法的非最优频率组合相比, 其最优频率组合错误率分别降低了 62.96% 和 49.23%。本文提出的最优频率分配策略在外差 TPU 和分层 TPU 中均表现出较高的精度和鲁棒性, 可为两种非标准算法的条纹频率分配提供参考。

参考文献：

[1] 吴荣, 赵世丽, 赵洋, 等. 条纹投影用于不同景深物体的三维测量[J]. 红外与激光工程, 2022, 51(11): 20220088.
WU R, ZHAO SH L, ZHAO Y, *et al*.. Fringe projection profilometry for 3D measurement of objects with different depth of fields[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2022, 51(11): 20220088. (in Chinese).

[2] ZUO CH, FENG SH J, HUANG L, *et al*.. Phase shifting algorithms for fringe projection profilometry: a review[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, 109: 23-59.

[3] FENG SH J, ZUO CH, ZHANG L, *et al*.. Calibration of fringe projection profilometry: a comparative review[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2021, 143: 106622.

[4] 王永红, 张倩, 胡寅, 等. 显微条纹投影小视场三维表面成像技术综述[J]. 中国光学, 2021, 14(3): 447-457.
WANG Y H, ZHANG Q, HU Y, *et al*.. 3D small-field surface imaging based on microscopic fringe projection profilometry: a review[J]. *Chinese Optics*, 2021, 14(3): 447-457. (in Chinese).

[5] GU Z M, FU J ZH, LIN H, *et al*.. Development of 3D bioprinting: from printing methods to biomedical applications[J]. *Asian Journal of Pharmaceutical Sciences*, 2020, 15(5): 529-557.

[6] HU Y, CHEN Q, FENG SH J, *et al*.. Microscopic fringe projection profilometry: a review[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, 135: 106192.

[7] GENG J. Structured-light 3D surface imaging: a tutorial[J]. *Advances in Optics and Photonics*, 2011, 3(2): 128-160.

[8] VAN DER JEUGHT S, DIRCKX J J J. Real-time structured light profilometry: a review[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2016, 87: 18-31.

[9] 王霖, 韩旭, 伏燕军, 等. 用于三维测量的快速相位解包裹算法[J]. 应用光学, 2019, 40(2): 271-277.
WANG L, HAN X, FU Y J, *et al*.. Fast phase unwrapping algorithm for 3D measurement[J]. *Journal of Applied Optics*, 2019, 40(2): 271-277. (in Chinese).

[10] WANG L, YI L N, ZHANG Y T, *et al*.. 3D reconstruction method based on *N*-step phase unwrapping[J]. *The Visual Computer*, 2024, 40(5): 3601-3613.

[11] SU X Y, CHEN W J. Reliability-guided phase unwrapping algorithm: a review[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2004, 42(3): 245-261.

[12] 杨泽霖, 张启灿, 衷涵. 利用双频外差和时空相位展开实现三维测量[J]. 光学与光电技术, 2023, 21(1): 46-56.
YANG Z L, ZHANG Q C, ZHONG H. Three dimensional shape measurement using dual-frequency heterodyne and spatial-temporal phase unwrapping[J]. *Optics & Optoelectronic Technology*, 2023, 21(1): 46-56. (in Chinese).

[13] ZUO CH, HUANG L, ZHANG M L, *et al*.. Temporal phase unwrapping algorithms for fringe projection profilometry: a comparative review[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2016, 85: 84-103.

[14] ZHANG S. Absolute phase retrieval methods for digital fringe projection profilometry: a review[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, 107: 28-37.

[15] WU H T, CAO Y P, AN H H, *et al*.. A novel phase-shifting profilometry to realize temporal phase unwrapping simultaneously with the least fringe patterns[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2022, 153: 107004.

[16] 张昂, 孙亚琴, 高楠, 等. 三灰度编码相位展开方法条纹投影轮廓术[J]. 光学 精密工程, 2022, 30(5): 518-526.
ZHANG A, SUN Y Q, GAO N, *et al*.. Fringe projection profilometry by ternary-gray encoded phase unwrapping method[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2022, 30(5): 518-526. (in Chinese).

[17] OCHOA N A. Fringe analysis with a two-step phase shifting method based on local Lissajous ellipse fitting[J]. *Optics Communications*, 2021, 483: 126647.

[18] 李乐阳, 吴周杰, 张启灿. 基于相移条纹分析的相位误差补偿技术发展综述 (特邀)[J]. 激光与光电子学进展, 2024, 61(2): 0211008.
LI Y Y, WU ZH J, ZHANG Q C. Phase error compensation technique based on phase-shifting fringe analysis: a review (Invited)[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2024, 61(2): 0211008. (in Chinese).

[19] 王一, 王祎泽, 郗继贵. 光学相控器件调制误差对干涉投影条纹的影响[J]. 激光与红外, 2016, 46(7): 852-856.
WANG Y, WANG Y Z, ZHU J G. Influence of modulation error of optical phase control device on interference projection fringe[J]. *Laser & Infrared*, 2016, 46(7): 852-856. (in Chinese).

[20] LI J L, HASSEBROOK L G, GUAN CH. Optimized two-frequency phase-measuring-profilometry light-sensor temporal-noise sensitivity[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2003, 20(1): 106-115.

[21] 刘路, 潘艳娟, 奚冬冬, 等. 相位编码条纹投影轮廓术的相位展开误差校正方法[J]. 应用光学, 2020, 41(5): 978-983.
LIU L, PAN Y J, XI D D, *et al*.. Phase unwrapping errors correction for phase-encoding based on fringe projection profilometry[J]. *Journal of Applied Optics*, 2020, 41(5): 978-983. (in Chinese).

[22] 侯艳丽, 梁瀚钢, 李付谦, 等. 相位测量轮廓术中时空结合的三频相位展开[J]. 光学学报, 2022, 42(1): 0112006.
HOU Y L, LIANG H G, LI F Q, *et al*.. Spatial-temporal combined phase unwrapping in phase measurement profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2022, 42(1): 0112006. (in Chinese).

[23] CAI Z W, LIU X L, JIANG H, *et al*.. Flexible phase error compensation based on Hilbert transform in phase shifting profilometry[J]. *Optics Express*, 2015, 23(19): 25171-25181.

[24] WANG J, WU ZH X, HUANG Y Y, *et al*.. A rapid and accurate gamma compensation method based on double response curve fitting for high-quality fringe pattern generation[J]. *Optics & Laser Technology*, 2023, 160: 109084.

[25] BING P, QIAN K M, LEI H, *et al*.. Phase error analysis and compensation for nonsinusoidal waveforms in phase-shifting digital fringe projection profilometry[J]. *Optics Letters*, 2009, 34(4): 416-418.

[26] LIU K, WANG Y CH, LAU D L, *et al*.. Gamma model and its analysis for phase measuring profilometry[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2010, 27(3): 553-562.

[27] ZHANG X, ZHU L M, LI Y F, *et al*.. Generic nonsinusoidal fringe model and gamma calibration in phase measuring profilometry[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2012, 29(6): 1047-1058.

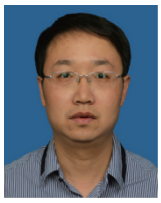
[28] ZUO CH, CHEN Q, GU G H, *et al*.. Optimized three-step phase-shifting profilometry using the third harmonic injection[J]. *Optica Applicata*, 2013, 43(2): 393-408.

[29] PETKOVIĆ T, PRIBANIĆ T, ZORAJA D. Selection of optimal frequencies in multiple-frequency fringe projection profilometry[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2023, 163: 107455.

[30] ZHU J P, FENG X Y, ZHU CH H, *et al*.. Optimal frequency selection for accuracy improvement in binary defocusing fringe projection profilometry[J]. *Applied Optics*, 2022, 61(23): 6897-6904.

[31] ZHANG M L, CHEN Q, TAO T Y, *et al*.. Robust and efficient multi-frequency temporal phase unwrapping: optimal fringe frequency and pattern sequence selection[J]. *Optics Express*, 2017, 25(17): 20381-20400.

作者简介：



王建华(1981—), 男, 山东临沂人, 博士, 副教授, 硕士生导师, 2004 年于中国地质大学获得学士学位, 2011 年于中国矿业大学获得硕士学位, 2019 年于西安理工大学获得博士学位, 主要从事计算机视觉、光学三维测量方面的研究。E-mail: wangjianhua@qut.edu.cn